6.1 不定积分概念

2023年11月28日 星期二 11:07

定义：设在区间 I 上，$F'(x)=f(x)$，$x\in I$

则称 F 是 f 在 I 上的一个原函数

f 在 I 上的全体原函数组成的集合，称作 f 在 I 上的不定积分，简称 f 的不定积分

$\int f(x)\,dx$ $\begin{cases}\int：积分号\\ f(x)：被积函数\\ dx：积分变量\end{cases}$

两个基本问题：

①什么样的函数存在原函数

②如果已知 f 在区间上有原函数，怎么求？

定理1：区间上的连续函数必定存在原函数

定理2：若 f 在 (a,b) 上有一个间断点 x_0

①若 x_0 是 f 的跳跃间断点或可去间断点，则 f 在 (a,b) 上没有原函数

②若 x_0 是 f 的第二类间断点，则 f 在 (a,b) 上可能有原函数，也可能没有 → 一侧极限不存在

证①：用反证法：

假设 f 在 (a,b) 上有原函数 F，则由导数极限定理.

$$f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_+'(x_0)$$

【导数极限定理】 若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续；

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内可导；

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在；

则 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

【单侧导数极限定理（右）】 若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某右邻域 $U_+(x_0)$ 内连续；

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某右去心邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 内可导；

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 存在；

则 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，且 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$.

【单侧导数极限定理（左）】 若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某左邻域 $U_-(x_0)$ 内连续；

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某左去心邻域 $U_-^\circ(x_0)$ 内可导；

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 存在；

则 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，且 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$.

F(x₀) 的左导数 $F_+'(x_0)=F'(x_0^+)=f(x_0^+)$

$F_-'(x_0)=F'(x_0^-)=f(x_0^-)$

又 F 在点 x_0 处可导

故 $f(x_0)=F'(x_0)=F_+'(x_0)=F_-'(x_0)$

故 $f(x_0)=f(x_0^+)=f(x_0^-)$

⇒ f 在点 x_0 连续

与 x_0 为间断点矛盾.

(2.1) 令 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

为什么2不能用1？

$F_+'(x_0)$ 不一定存在

则 $F'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(2.2) 令 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

则 0 是第二类间断点. 相若 F 是 f 在 R 上的原函数

则 $\exists C_1, C_2, C_3\in\mathbb{R}$，使

$F(x)=\begin{cases}\ln x+C_1, & x>0\\ \ln(-x)+C_2, & x<0\\ C_3 & x=0\end{cases}$

注意到 F 在点 0 处不连续，所以 F 在点 0 处不可导，

与 $F'(0)=f(0)$ 矛盾！

因此 f 不存在原函数

定理3：假设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则

(1) 任给常数 $C\in\mathbb{R}$，有 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数

(2) 若 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则存在常数 C，使

$G(x)=F(x)+C$，$x\in I$

$\int f(x)\,dx = F(x)+C$

↳ 有两种含义 $\begin{cases}①全体原函数\\ ②待定的某一个原函数\end{cases}$

微分	不定积分
$d(e^x)=e^x dx$	$\int e^x dx=e^x+C$
$d(\ln x)=\frac{dx}{x}$	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
$d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$	$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$
$d(\sin x)=\cos x dx$	$\int\cos x dx=\sin x+C$
$d(\cos x)=-\sin x dx$	$\int\sin x dx=-\cos x+C$
$d(\tan x)=\sec^2 x dx$	$\int\sec^2 x dx=\tan x+C$　$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$
$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$	$\int\csc^2 x dx=-\cot x+C$　$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\tan x}+C$
$d(\sec x)=\tan x\sec x dx$	$\int\tan x\sec x dx=\sec x+C$
$d(\csc x)=-\cot x\csc x dx$	$\int\cot x\csc x dx=-\csc x+C$
$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
$d(\arctan x)=\frac{dx}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$

线性性：假设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在区间 I 上有原函数，$k_1, k_2\in\mathbb{R}$ 且不全为0

则 $\int(k_1 f(x)+k_2 g(x))\,dx = k_1\int f(x)\,dx + k_2\int f(x)\,dx$

推广↓

一般地，设 $f_1, f_2\cdots f_n$ 都在区间 I 上存在原函数，$k_1, k_2\cdots k_n$ 为不全为零的常数

$$\int\sum_{i=1}^{n}k_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}k_i\int f_i(x)\,dx$$

Landou 不等式

设函数 f 在 R 上二阶可导，记 $M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\lvert f(x)\rvert$　$M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\lvert f'(x)\rvert$　$M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\lvert f''(x)\rvert$

则当 $M_0, M_2<+\infty$ 时，$M_1^2\le 4M_0M_2$

事实上此时有 $M_1^2\le 2M_0M_2$

$\forall x\in\mathbb{R}$ 及 $y>0$，

$f(x+y)=f(x)+f'(x)\cdot y+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\cdot y^2$

$f(x-y)=f(x)-f'(x)y+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\cdot y^2$

故 $\lvert 2y\cdot f'(x)\rvert\le\lvert f(x+y)-f(x-y)\rvert+M_2\cdot y^2$

$\Rightarrow \lvert f'(x)\rvert\le\frac{\lvert f(x+y)-f(x-y)\rvert}{2y}+\frac{M_2 y}{2}$

$\le\frac{M_0}{y}+\frac{M_2 y}{2}$

① $M_0M_2>0$

取 $y>0$，$\frac{M_0}{y}=\frac{M_2 y}{2}$ 则 $\lvert f'(x)\rvert\le 2\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}}$

（y 为任意的）

$\Rightarrow M_1^2\le 2M_0M_2$

② $M_0=0$ 或 $M_2=0$　$M_0=0$ ✓　$M_2=0$ 不可能 .

6.2 换元积分法与分部积分法

2023年11月30日 星期四　13:31

第一换元积分法.

设g是定义在区间J上的函数，函数φ在区间I可导，且$\varphi(I)\subset J$，定义 $f(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$，$x\in I$

若函数g在区间J上有原函数G，

则函数f在区间I上有原函数，并且

$$\int f(x)\,dx=G(\varphi(x))+C$$

证：$\forall x\in I$，有

$$(G(\varphi(x)))'=G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=f(x)$$

例：求 $\int \tan x\,dx$

$$=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

令 $\cos x=u$

$$=\int-\frac{1}{u}\,du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C$$

例：求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ $(a>0)$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2}\,d(\frac{x}{a})$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+u^2}\,du \quad (令\ u=\frac{x}{a})$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\arctan u+C$$

$$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例：$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\int\frac{(\frac{x}{a})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\,dx=\int\frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

例：$\int\frac{dx}{x^2-a^2}$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{x-a}\,dx-\int\frac{1}{x+a}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad dx$$

绝对值千万不能忘.

例：$\int\sec x\,dx$

法1 $=\int\frac{1}{\cos x}\,dx$

$$=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2x}\,dx=\int\frac{1}{1-\sin^2x}\,d\sin x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C$$

法2 $=\int\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}\,dx$

$$=\int\frac{d(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\ln|\tan x+\sec x|+C$$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$\int\csc x\,dx$

$$=-\ln|\csc x+\cot x|+C$$

$$=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

例：$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

$$=\int\frac{2}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx=\int\frac{2}{1+u^2}\,du=2\arctan x(\sqrt{x})+C$$

第二换元积分法

思路：$\int g(u)\,du \overset{令u=\varphi(x)}{=\!=} \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \overset{令f(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}{=\!=} \int f(x)\,dx \overset{f(x)原函数F(x)}{=\!=} F(x)+C \overset{把x=\varphi^{-1}(u)换回}{=\!=} F(\varphi^{-1}(u))+C$

设函数g在区间I上有定义，函数φ在区间I上可导

且$\varphi(I)=J$（满），令 $f(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$，$x\in I$

如果$\varphi'(x)\neq0$，$x\in I$（既单又满→反函数）且f在区间I上有原函数F，

则φ在区间I上有反函数：$\varphi^{-1}: J\to I$

g在区间I上有原函数，并且 $\int g(u)\,du=\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx=F(\varphi^{-1}(u))+C$

例：求 $\int\frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}\,du$

$$=\int\frac{1}{x^3+x^2}6x^5\,dx \quad (u=x^6)$$

$$=6\int\frac{x^3}{x+1}\,dx=6\int x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=6(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+x-\ln|x+1|)+C$$

$$=2x^3-3x^2+6x-6\ln|x+1|+C$$

$$=2\sqrt{u}-3\sqrt[3]{u}+6\sqrt[6]{u}-6\ln|\sqrt[6]{u}+1|+C$$

例：$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a>0)$

$$=\int a|\cos t|\cdot d(a\sin t)\quad(a>0)$$

$$=\int a^2\cos^2t\,dt\quad t\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}))$$

$$=a^2\int\frac{1+\cos2t}{2}\,dt=a^2(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}\sin2t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})+C$$

$$=\frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2})+C$$

例：$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$

$$=\int\frac{(a\sec t)'}{a\tan t}\,dt\quad x=a\sec t$$

$$=\int\sec t\,dt=\ln|\sec t+\tan t|+C=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right|+C=\ln|x+\sqrt{a^2-x^2}|+C$$

例：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$

$$=\int\frac{(a\tan t)'}{a\sec t}\,dt\quad \boxed{t\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})}\ 找双射\quad x=a\tan t$$

$$=\int\sec t\,dt=\ln|\sec t+\tan t|\,dt=\ln\left|\sqrt{1+(\tfrac{x}{a})^2}+\tfrac{x}{a}\right|+C=\ln|\sqrt{a^2+x^2}+x|+C$$

※若被积函数含有诸如 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}$ 等形式，考虑三角换元。

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$$

例：$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

$$=\int\frac{(a\tan t)'}{a^4\sec^4}=\int\frac{1}{a^3\sec^2t}\,dt=\frac{1}{a^3}\int\cos^2t\,dt$$

$$=\frac{1}{2a^3}\cdot[t+\tfrac{1}{2}\sin2t]+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}[\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}]+C.$$

$$=\frac{1}{2a^2}[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+x\cdot\frac{1}{x^2+a^2}]+C$$

例：$\int x(2x-1)^{100}\,dx$

$$=\int\frac{t+1}{2}\cdot t^{100}\cdot(\frac{t+1}{2})'\,dt=\int(\tfrac{1}{2}t^{101}+\tfrac{1}{2}t^{100})\cdot\tfrac{1}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{102}t^{102}+\frac{1}{101}t^{101})+C$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{102}(2x-1)^{102}+\frac{1}{101}(2x-1)^{101})+C$$

例：$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

① 令 $x=\sec t$，其中t的取值

当$x>0$时 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$

当$x<0$时 $t\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$

保证 $\tan t>0$.

则原式 $=\int\frac{(\sec t)'}{\sec^2t\tan t}=\int\frac{1}{\sec t}\,dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C$

当$x>0$时 $\sin t=\sqrt{1-\cos^2t}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}$

当$x<0$时 $\sin t=-\sqrt{1-\cos^2t}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}$

② 原式 $=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\,dt\quad(t=\frac{1}{x})$

（当$x>1$时）

$$=\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{1-t^2}+C=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+C$$

分部积分法

设函数$u(x)$和$v(x)$都在区间I上可导，若$u'(x)v(x)$存在原函数

则$u(x)v'(x)$也存在原函数

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx\ （利用积分的线性性）$$

越简单越好

$\Rightarrow \int u\,dv=uv-\int v\,du$

例：$\int x\cos x\,dx$

$$=x\sin x-\int\cos x\,dx=x\sin x-\sin x+C$$

例：$\int\arctan x\,dx$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2)'\,dx$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}\,dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

例 $\int x^3\ln x\,dx$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\int\frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$$

例 $\int\ln x\,dx$

$$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C$$

例 $\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

$$=-x^2e^{-x}+\int2xe^{-x}\,dx=-x^2e^{-x}+(-2xe^{-x})+\int2e^{-x}\,dx=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

例：$\int\frac{x}{1+\cos x}\,dx$

$$=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\int\frac{2t}{\cos^2t}\,dt\quad(x=2t)$$

$$=2(t\cdot\tan t-\int\tan t\,dt)=2(t\cdot\tan t+\ln|\cos t|)+C=x\tan\frac{x}{2}+2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C$$

例：求 $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx$

$I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$I_1=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\int\frac{1}{a}e^{ax}b\cdot\sin bx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I_2$$

$$I_2=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\int\frac{1}{a}e^{ax}\cdot b\cos bx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I_1$$

求方程组即可！

例：$I=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ （其中$a>0$）

法1：原式 $=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-I+\int\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-I+a^2\cdot\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$$

故 $I=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|}{2}+C$

法2：令 $x=a\tan t$

则 $I=\int a\sec t\,d\tan t=a^2\int\sec^3t\,dt$

$\int\sec^3t\,dt$

$$=\tan t\sec t-\int\tan^2t\sec t\,dt=\tan t\sec t-\int(\sec^2t-1)\sec t\,dt$$

$$=\tan t\sec t-\int\sec^3t+\ln|\tan t+\sec t|+C$$

故 $I=a^2(\frac{\tan t\sec t+\ln|\tan t+\sec t|}{2})+C$

$$=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|)+C$$

类似可得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|]+C$$

例：求 $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ （其中$a>0$）

当$n\geq2$时

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int(I_{n-1}-\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n})\,dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\int I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}=\frac{-1}{(-n+1)\cdot2}\int x\,d(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}})$$

这种写法对原来形式的分部积分法更清晰

$$=\frac{1}{2(n-1)}(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-I_{n-1})$$

故 $I_n=\frac{1}{a^2}[\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}+\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}]+C$

$$I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

6.3 有理函数的不定积分

2023年12月2日 星期六 22:18

有理函数 $R(x)=\dfrac{\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_0}{\beta_m x^m+\beta_{m-1}x^{m-1}+\cdots+\beta_0}$

其中 $\alpha_n\cdots\alpha_0,\ \beta_m\cdots\beta_0\in\mathbb{R}$ 且 $\alpha_n\neq0$ $\beta_m\neq0$（不妨设$\beta_m=1$）

真分式 $n<m$ 假分式 $n\geq m$

↳ 可表示为多项式+真分式

第一步：因式分解

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}$$

其中 $a_1,\cdots a_s\in\mathbb{R}$，$p_j\cdots q_j\in\mathbb{R}$ $1\leq j\leq t$

且 $p_j^2<4q_j$，$1\leq j\leq t$

$\lambda_1\cdots\lambda_s,\ \mu_1\cdots\mu_t\in\mathbb{Z}^+$

第二步：导出对应有理分式

$$(x-a)^\lambda=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\lambda}{(x-a)^n}$$

$$(x^2+px+q)^\mu=\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_\mu x+C_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}$$

从而导出

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{\lambda_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\quad(1)$$

其中 A_{ik} $(1\leq i\leq s,\ 1\leq k\leq\lambda_i)$ 均为待定系数

B_{jk},C_{jk} $(1\leq j\leq t,\ 1\leq k\leq\mu_j)$

第三步：确定待定系数

常用方法：

(1)式同乘以$Q(x)$，比较同幂次系数，

得到线性方程组，由此解出待定系数

例：对 $R(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ 作分解

由于 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

故 $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$=(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\ B=-\frac{1}{3}\\ C=\frac{2}{3}\end{cases}\qquad \frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$

另解：可将$x=-1$代入 立即得 $A=\frac{1}{3}$

例：对 $R(x)=\dfrac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}$ （真分式）

则 $R(x)=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+1)}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

$$\Rightarrow x^4+x^3+3x^2-1=A(x^4+2x^2+1)+(Bx+C)\underbrace{(x-1)(x^2+1)}_{(x^3-x^2+x-1)}+(Dx+E)(x-1)$$

求有理函数的不定函数归结为

(I) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^k}dx$ (II) $\displaystyle\int\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}dx$

$$\text{(I)}\int\frac{1}{(x-a)^k}dx=\begin{cases}\ln|x-a|+C, & k=1\\ \dfrac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C, & k\geq2\end{cases}$$

$$\text{(II)}\int\frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{L(x+\frac{p}{2})+(M-\frac{pL}{2})}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}dx$$

令 $t=x+\frac{p}{2}$，$N=M-\frac{pL}{2}$ $r^2=q-\frac{p^2}{4}$

则上式 $=\displaystyle\int\frac{Lt+N}{(t^2+r^2)^k}dt$

$$=L\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}dt+N\int\frac{1}{(t^2+r^2)^k}dt$$

$$\int\frac{t}{(t^2+r^2)^k}dt=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln|t^2+r^2|+C, & k=1\\ \dfrac{-1}{2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}}+C, & k\geq2\end{cases}$$

$\displaystyle\int\frac{1}{(t^2+r^2)^k}dt$ 的求解 由6.2中已给出

例：求 $\displaystyle\int\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$

$$=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\ln|x-1|+C_1+\arctan x+C_2+\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\arctan x-\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\arctan x+\frac{1}{2}\int x\,d\frac{1}{(x^2+1)}$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\arctan x+\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{1}{x^2+1}-\int\frac{1}{x^2+1}dx\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2+1}+\arctan x+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}-\arctan x\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x$$

令$x=1$时 $A=1$

比较x^4的系数 $B=0$

比较x^3的系数 $C=1$

比较x^2的系数 $D=2$

比较常系数 $E=1$

$$R(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$$

三角函数有理式的不定积分

定义 由$u(x)$, $v(x)$及常值函数经过有限次四则运算得到的函数，称为关于$u(x)$与$v(x)$的有理式，并用$R(u(x),v(x))$表示

下面计算 $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$

一般方法：令 $t=\tan\frac{x}{2}$

则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $x=2\arctan t$ $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

从而 $\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

例：求 $\int\frac{dx}{4+4\sin x+\cos x}$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$

$$原式=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{4+\frac{8t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt$$

$$=\int\frac{2}{4+4t^2+8t+1-t^2}dt$$

$$=\int\frac{2}{3t^2+8t+5}dt$$

$$=\int\frac{2}{(3t+5)(t+1)}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{3}{3t+5}\right)dt$$

$$=\ln|t+1|-\ln|3t+5|+C$$

$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\ln\left|3\cdot\tan\frac{x}{2}+5\right|+C$$

※注：可能有更简单的方法

例：$\int\frac{\cot x}{1+\sin x}dx$

$$=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x(1+\sin x)}dx$$

$$=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+C$$

例：$\int\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx$

$$=\int\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}dx$$

$$=\int\frac{(\tan x)'}{a^2\tan^2x+b^2}dx$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\tan x+C$$

某些无理根式的不定积分

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 型不定积分 $(ad\neq bc)$ 0次

方法：令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，$t^n=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{b-d\cdot t^n}{c\cdot t^n-a}$

然后化为有理函数的不定积分

例：求 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$

令 $t=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\Rightarrow x=\frac{2(t^2+1)}{t^2-1}$

从而原式 $=\int\frac{t^2-1}{2(t^2+1)}\cdot t\left(-\frac{4}{(t^2-1)^2}\cdot 2t\right)dt$

$$=-4\int\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}dt$$

$$=-2\arctan\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-1}\right|+C$$

例：$\int\frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})}$

令 $x=t^6$ $(t>0)$

$$原式=\int\frac{6t^5}{t^6(t^2-t^3)}dt$$

$$=\int\frac{6}{t^3(1-t)}dt$$

$$=6\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=6\left(\ln\left|\frac{t}{t-1}\right|-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)+C$$

$$=6\left(\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}\right|-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)+C$$

衍生物

---

2. $\int R\left(x,\sqrt[n]{(ax+b)^i(cx+d)^j}\right)dx$ $(i+j=kn)$

方法：先把 化为 $(ax+b)^k\sqrt[n]{\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right)^j}$ 再令 $t=\sqrt[n]{\frac{cx+d}{ax+b}}$

例：求 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$

由于 $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}=\frac{1}{(x+1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}=\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}{(x+1)^2}$

令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ $x=\frac{1+t^3}{t^3-1}$

故原式 $=\int\frac{t^2}{\left(\frac{2t^3}{t^3-1}\right)^2}\left(-\frac{2}{(t^3-1)^2}\cdot 3t^2\right)dt$

$$=-\int\frac{6t^4}{4t^6}dt$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\frac{3}{2t}+C=\frac{3}{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}+C$$

※当被积函数是 $\sin^2 x$，$\cos^2 x$，$\sin x\cos x$ 的有理数时，采用变换 $t=\tan x$

补充例题

1. $I=\int x\tan x\sec^2 x\,dx$

$=\int x\sec x\,d(\sec x)$

$=x\sec^2 x-\int \sec x\cdot(\sec x+x\sec x\tan x)dx$

$=x\sec^2 x-\int \sec^2 x\,dx-\int x\tan x\sec^2 x\,dx$

$\therefore I=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{2}+C$

2. $I=\int \dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

$=-\frac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+1}\ln x+\int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=-\frac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\,dx$

$=-\frac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x^2+1}+\ln|x|-\ln(x^2+1)+C$

3. $I=\int \dfrac{\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$

★ 由于 $\sin x=A(2\sin x+3\cos x)-B(2\sin x+3\cos x)'$

……

4. $I=\int \dfrac{1}{x^4+1}dx$

令 $J=\int \dfrac{x^2}{x^4+1}$

$I+J=\int \dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+(\frac{1}{x})^2}dx$

$=\int \dfrac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}d(x-\frac{1}{x})$

$=\int \dfrac{1}{t^2+2}dt$ （令 $t=x-\frac{1}{x}$）

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C_1$

$I-J=\int \dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{x^2+(\frac{1}{x})^2}dx$

$=-\int \dfrac{1}{x^2+(\frac{1}{x})^2}d(x+\frac{1}{x})$

$=-\int \dfrac{1}{m^2-2}dm$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int(\frac{1}{m-\sqrt{2}}-\frac{1}{m+\sqrt{2}})\,dm$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{m-\sqrt{2}}{m+\sqrt{2}}\right|+C$

※注：对于求诸如：

$\int \dfrac{ax+b}{x^2+2px+q^2}dx$，$\int \dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+2px+q^2}}dx$

和 $\int (ax+b)\sqrt{x^2+2px+q^2}$ 型不定积分

解题思路类似，先分拆 $ax+b$

比如 $\int \dfrac{ax+b}{x^2+2px+q^2}dx=\int \dfrac{\frac{a}{2}(x^2+2px+q^2)'+(b-ap)}{x^2+2px+q^2}dx$

例：求 $\int (x+1)\sqrt{x^2-2x+5}\,dx$

$=\int[\frac{1}{2}(x^2-2x+5)'+2]\sqrt{x^2-2x+5}\,dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}+2\int\sqrt{x^2-2x+5}\,dx$

又 $\int\sqrt{x^2-2x+5}\,dx$

$\int\sqrt{(x-1)^2+4}\,d(x-1)$

$=$ ……

$\int\sqrt{u^2+a^2}\,du$

$=u\sqrt{u^2+a^2}-\int\dfrac{u^2}{\sqrt{u^2+a^2}}du$

$=u\sqrt{u^2+a^2}-\int\sqrt{u^2+a^2}-\dfrac{a^2}{\sqrt{u^2+a^2}}du$

$I=\dfrac{u\sqrt{u^2+a^2}-a^2\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|}{2}+C$

另解：$\int(x+1)\sqrt{(x-1)^2+2^2}\,dx$

令 $x=1+2\tan t$

原式 $=8\int(1+\tan t)\sec^3 t\,dt$

$\begin{cases}\int\sec^2 t\,d\sec t=\frac{1}{3}\sec^3 t+C\\ \int\sec^3 t\,dt=\int\sec t\,d\tan t\end{cases}$

$=\sec t\tan t-\int\tan^2 t\sec t\,dt$

$=\sec t\tan t-\int(\sec^3 t-\sec t)\,dt$

$=$ …

6.4 经典积分总结

2023年12月11日 星期一 18:56

例：求 $\int \tan x \, dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

令 $\cos x = u$

$= \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + C$

$= -\ln|\cos x| + C$

例：$\int \sec x \, dx$

法1 $= \int \frac{1}{\cos x} dx$

$= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$

$= \int \frac{1}{1-\sin^2 x} d\sin x$

$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C$

法2 $= \int \frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x} dx$

$= \int \frac{d(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}$

$= \ln|\tan x+\sec x| + C$

$(\sec x)' = \sec x\tan x$

$(\csc x)' = -\csc x\cot x$

$(\tan x+\sec x)' = \sec x\tan x + \sec^2 x$

$\int \sec^3 t \, dt$

$= \tan t\sec t - \int \tan^2 t\sec t \, dt$

$= \tan t\sec t - \int (\sec^2 t - 1)\sec t \, dt$

$= \tan t\sec t - \int \sec^3 t + \ln|\tan t+\sec t| + C$

故 $I = a^2\left(\frac{\tan t\sec t + \ln|\tan t+\sec t|}{2}\right) + C$

$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|\right) + C$

例：$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \int \frac{(\frac{x}{a})'}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} dx$

$= \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$

$= \arcsin\frac{x}{a} + C$

例：$I = \int \sqrt{x^2+a^2} \, dx$ （其中 $a>0$）

法1：原式 $= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \cdot \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$

故 $I = \frac{x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|}{2} + C$

例：$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right)$

$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad dx$

↑绝对值千万不能忘。

例：求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx \quad (a>0)$

$= \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2} d(\frac{x}{a})$

$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}du \quad$ (令 $u=\frac{x}{a}$)

$= \frac{1}{a}\cdot \arctan u + C$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

例：$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

$= \int a|\cos t|\cdot d(a\sin t) \quad (a>0)$

$= \int a^2\cos^2 t\,dt \quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$= a^2(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t) + C$

$= \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}) + C$

$= \frac{1}{2}(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}) + C$

法2：令 $x = a\tan t$

则 $I = \int a\sec t\,d\tan t$

$= a^2\int \sec^3 t\,dt$

类似可得

$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|] + C$

例：求 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ (其中 $a>0$)

当 $n\geq 2$ 时

$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$

$= \frac{1}{a^2}\int (I_{n-1} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n})\,dx$

$= \frac{1}{a^2}\int I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$

这种写法对复杂形式的分部积分法更清晰

$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n} = \underbrace{\frac{-1}{(-n+1)\cdot 2}\int x\,d(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}})}$

$= \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right)$

故 $I_n = \frac{1}{a^2}[\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}] + C$

$I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

例：$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$

$= \int \frac{(a\sec t)'}{a\tan t}dt \quad x = a\sec t$

$= \int \sec t\,dt$

$= \ln|\sec t + \tan t| + C$

$= \ln|\frac{x}{a} + \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}| + C$

例：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

找双射

$= \int\frac{(a\tan t)'}{a\sec t}dt \quad \frac{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{x=a\tan t}$

$= \int \sec t\,dt$

$= \ln|\sec t + \tan t|\,dt$

$= \ln|\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2} + \frac{x}{a}| + C$

$= \ln|x+\sqrt{a^2-x^2}|+C$

$= \ln|\sqrt{a^2+x^2}+x|+C$

※若被积函数含有诸如

$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}$

等形式，考虑三角换元。

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|+C$